



TITLE:

U-convexity of direct sums of Banach spaces(The structure of Banach spaces and Function spaces)

AUTHOR(S):

三谷, 健一

CITATION:

三谷, 健一. U-convexity of direct sums of Banach spaces(The structure of Banach spaces and Function spaces). 数理解析研究所講究録 2006, 1520: 142-150

ISSUE DATE:

2006-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58762>

RIGHT:

U-convexity of direct sums of Banach spaces

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)

1 序文

最近, absolute ノルムをもつ \mathbb{C}^n 上において, そのノルムの性質や幾何学的性質に関する結果が得られている. 斎藤-加藤-高橋 [10] は, \mathbb{C}^2 上の absolute norm における von Neumann-Jordan 定数を計算した. また, \mathbb{C}^n 上の absolute norm をある凸関数で特徴づけた ([11]). また, それに関連して ℓ_p 直和空間を一般化した空間として ψ 直和空間が導入され, 加藤-斎藤 [9], 加藤-斎藤-田村 [4], 三谷-斎藤-鈴木 [8] などによって, その空間での狭義凸性や一様凸性, 一様 non-square 性, Smooth 性, 一様 smooth 性などの特徴づけに関する研究が行われている.

本講演では, ψ -直和バナッハ空間の U -convexity の特徴付けをすることを目的とする.

Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3] は $X \oplus_\psi Y$ の U -convexity を特徴付けたが, 本講演では n 個の ψ -直和についての U -convexity の特徴付けを述べる.

X をバナッハ空間とし, X の単位球面を $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする. $x \neq 0$ なる X の元 x に対し, x の norming functional 全体を $D(X, x)$ とする. 即ち, $D(X, x) = \{f \in S_{X^*} : f(x) = \|x\|\}$.

Definition 1.1 ([5]) バナッハ空間 X が U -space であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, 次を満たすときを言う.

$$\forall x, y \in S_X, \quad \|x + y\| > 2(1 - \delta) \Rightarrow f(y) > 1 - \varepsilon, \quad \forall f \in D(X, x).$$

Definition 1.2 ([3]) バナッハ空間 X が u -space であるとは, $\|x + y\| = 2$ なる任意の $x, y \in S_X$ に対して $D(X, x) = D(X, y)$ を満たすときを言う.

2 Absolute norms and ψ -direct sums

\mathbb{C}^n 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

が成立するときを言う. $\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1, 0, \dots, 0)\| = \|(0, 1, 0, \dots, 0)\| = \dots = \|(0, \dots, 0, 1)\| = 1.$$

をいう. 例えば ℓ_p -norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(|x_1|, \dots, |x_n|) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_n を \mathbb{C}^n 上の absolute normalized norm 全体とする. \mathbb{C}^2 上の absolute normalized norm について, Bonsall-Duncan ([2]) の中で, 次のような記述が見られる. 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \quad (0 \leq t \leq 1).$$

とおく. このとき, ψ は $[0, 1]$ 上の連続な凸関数で

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$$

を満たす. そこで, このような関数の全体を Ψ_2 とおくことにする.

Theorem 2.1 ([10]) AN_2 と Ψ_2 は上記の対応で, 1 対 1 に対応する. 即ち, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して,

$$\|(z, w)\|_\psi = \begin{cases} (|z| + |w|)\psi\left(\frac{|w|}{|z| + |w|}\right) & ((z, w) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((z, w) = (0, 0)) \end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ でかつ $\psi(t) = \|(1-t, t)\|_\psi$ ($0 \leq t \leq 1$) を満たす.

例えば, ℓ_p ノルムに対応する凸関数は $\psi_p(t) = \{(1-t)^p + t^p\}^{1/p}$ で与えられる. また, ℓ_p ノルム以外に多くの absolute normalized なノルムが沢山あることが分かる.

斎藤-加藤-高橋は [11] において \mathbb{C}^n 上の absolute norm を次のように特徴付けた.

$$\Delta_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} \leq 1, s_i \geq 0 (\forall i)\}.$$

とおく. 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(s) = \|(1 - s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-1})\| \quad (\forall s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \Delta_n)$$

とすると, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす.

$$(A_0) \quad \psi(0, \dots, 0) = \psi(1, 0, \dots, 0) = \dots = \psi(0, \dots, 0, 1) = 1,$$

$$(A_1) \quad \psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (s_1 + \dots + s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{s_1 + \dots + s_{n-1}}, \dots, \frac{s_{n-1}}{s_1 + \dots + s_{n-1}}\right),$$

$$(A_2) \quad \psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (1 - s_1)\psi\left(0, \frac{s_2}{1 - s_1}, \dots, \frac{s_{n-1}}{1 - s_1}\right),$$

.....

$$(A_n) \quad \psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (1 - s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{1 - s_{n-1}}, \dots, \frac{s_{n-2}}{1 - s_{n-1}}, 0\right).$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0), (A_1), \dots, (A_n)$ を満たすもの全体とする. ℓ_p -norm に対応する関数は次のものになる.

$$\psi_p(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = \begin{cases} ((1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i)^p + s_1^p + \dots + s_{n-1}^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i, s_1, \dots, s_{n-1}) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

Theorem 2.2 ([11]) 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(s) = \|(1 - s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}, s_1, \dots, s_{n-1})\| \quad (\forall s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \Delta_n) \quad (1)$$

と定義すると $\psi \in \Psi_n$ である. 逆に, 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + \dots + |x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1| + \dots + |x_n|}, \dots, \frac{|x_n|}{|x_1| + \dots + |x_n|}\right) & \text{if } (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{if } (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0). \end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ であり, (1) を満たす. 従って, AN_n と Ψ_n は, 1 対 1 対応に対応する.

さらに次のように ψ -直和空間が導入された. $\psi \in \Psi_n$ とおく. また X_1, X_2, \dots, X_n をバナッハ空間とする. このとき $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ 上のノルムを

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\psi &= \|(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_n\|)\|_\psi \quad (x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n). \\ &= \begin{cases} (\|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|)\psi\left(\frac{\|x_2\|}{\|x_1\| + \dots + \|x_n\|}, \dots, \frac{\|x_n\|}{\|x_1\| + \dots + \|x_n\|}\right) & \text{if } (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{if } (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

とする. このバナッハ空間を X_1, X_2, \dots, X_n の直和とよび $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ と表す.

Example 2.3 $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_{\psi_p} = (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_p$.

Example 2.4 $1 \leq q < p \leq \infty, 2^{1/p-1/q} < \lambda < 1$ とする. また, $\psi_{p,q,\lambda} = \max\{\psi_p, \lambda\psi_q\} \in \Psi$ とおく. このとき $X \oplus_{\psi_{p,q,\lambda}} Y$ のノルムは

$$\|(x, y)\|_{\psi_{p,q,\lambda}} = \max\{\|(x, y)\|_p, \lambda\|(x, y)\|_q\}$$

と与えられる.

Example 2.5 $1/2 \leq \alpha \leq 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t + 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \alpha, \\ t & \text{if } \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_\alpha} Y$ のノルムは

$$\|(x, y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

Theorem 2.6 ([4, 12]) X_1, X_2, \dots, X_n をバナッハ空間とし, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき,

- (i) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ が狭義凸であることと X_1, X_2, \dots, X_n が狭義凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.
- (ii) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ が一様凸であることと X_1, X_2, \dots, X_n が一様凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

各 $\psi \in \Psi_n$ に対して, \mathbb{R}^{n-1} 上の関数 $\tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\psi}(t) = \sup \left\{ \begin{array}{l} \psi(s) + \langle a, t - s \rangle : s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in \Delta_n, \\ a \in \partial\psi(s), \\ \psi(s) + \langle a, p_j - s \rangle \geq 0 \text{ for } j \in I_n \end{array} \right\}$$

とおく. ここで, $p_0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$, $p_j = (0, 0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, 0, \dots, 0) \in \Delta_n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $I_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Proposition 2.7 $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき,

- (i) 任意の $t \in \Delta_n$ に対して, $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$
- (ii) $\tilde{\psi}$ は \mathbb{R}^{n-1} 上の凸関数である.

Remark 2.8 $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき,

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{if } t < 0, \\ \psi(t), & \text{if } 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \text{if } t > 1. \end{cases}$$

Theorem 2.9 ([7]) X_1, X_2, \dots, X_n をバナッハ空間とし, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ が *smooth* であることと X_1, X_2, \dots, X_n が *smooth* かつ $\tilde{\psi}$ が Δ_n 上で微分可能であることは同値.

3 U-convexity

Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3] は $(X \oplus Y)_\psi$ の U -convexity を特徴付けたが、本章では n 個の ψ -直和についての U -convexity を特徴付けを述べる.

まず $(X \oplus Y)_\psi$ の U -convexity について考察する. これを考察するためには、次の Bonsall-Duncan [2] による $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ の norming functional についての結果が必要となる. $\psi \in \Psi_2$ に対して、 $x(t)$ を

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1-t, t).$$

と定める.

Lemma 3.1 (Bonsall-Duncan [2]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき各 $t \in [0, 1]$ に対して

$$D(\mathbb{C}^2, x(t)) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in \partial\tilde{\psi}(0), |c|=1 \right\}, & \text{if } t=0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \psi(t)-at \\ \psi(t)+a(1-t) \end{pmatrix} : a \in \partial\tilde{\psi}(t) \right\}, & \text{if } 0 < t < 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} c(1-a) \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \partial\tilde{\psi}(1), |c|=1 \right\}, & \text{if } t=1 \end{cases}$$

である.

Theorem 3.2 (Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3]) X, Y をバナッハ空間とする. また、 $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき次は同値.

- (i) $(X \oplus Y)_\psi$ は U -space (resp. u -space).
- (ii) X, Y は U -space (resp. u -space) かつ ψ は u -function. 即ち、任意の $s \neq t (0 < s < t < 1)$ なる $s, t \in [0, 1]$ に対して ψ が $[s, t]$ 上 affine ならば、 ψ は s, t で微分可能である.

我々はこの結果を $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ や $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ 上において考察することを目的とする.

Lemma 3.3 (Mitani-Saito-Suzuki [8]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき任意の

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in \Delta_n$$

に対して, $x(t)$ を

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_{n-1}, t_2, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

と定める. このとき

$$D(\mathbb{C}^n, x(t)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_0}(\psi(t) + \langle a, p_0 - t \rangle) \\ e^{i\theta_1}(\psi(t) + \langle a, p_1 - t \rangle) \\ e^{i\theta_2}(\psi(t) + \langle a, p_2 - t \rangle) \\ \vdots \\ e^{i\theta_{n-1}}(\psi(t) + \langle a, p_{n-1} - t \rangle) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \in \partial\varphi(t), \\ \theta_j \in [0, 2\pi) \\ \text{for } j \in I_n \text{ with } t_j = 0, \\ \theta_j = 0 \\ \text{for } j \in I_n \text{ with } t_j > 0 \end{array} \right\}$$

上の Lemma を使って, 次の結果を得ることができる.

Definition 3.4 関数 $\psi \in \Psi_n$ が *u-function* であるとは, 任意の $s \neq t$ なる $s, t \in \Delta_n$ に対して, ψ が $[s, t]$ 上 *affine* ならば, $\partial\tilde{\psi}(s) = \partial\tilde{\psi}(t)$ であるときをいう.

Theorem 3.5 (Mitani [6]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき次は同値.

- (i) $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ は *U-space* (resp. *u-space*).
- (ii) X_1, X_2, \dots, X_n は *U-space* (resp. *u-space*) かつ ψ は *u-function*.

またこの結果と同様にして, n 個の直和空間 $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ に対しても次の Lemma を使って特徴づけすることができる.

Lemma 3.6 (Mitani-Oshiro-Saito [7]) X_1, X_2, \dots, X_n をバナッハ空間とする. また, $\psi \in \Psi_n$ とする. また $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$, $\|x\|_\psi = 1$ と

する. このとき,

$$D((X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi, x) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in D(\mathbb{C}^n, (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)) \right. \\ \left. = \left\{ (a_1 f_1, \dots, a_n f_n) : \begin{array}{l} f_i \in S_{X_i^*} \text{ for } i \text{ with } x_i = 0 \\ f_i \in D(X_i, x_i) \text{ for } i \text{ with } x_i \neq 0. \end{array} \right\} \right\}.$$

Theorem 3.7 (Mitani [6]) X_1, X_2, \dots, X_n をバナッハ空間とする. また, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき次は同値.

- (i) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ は U -space (resp. u -space).
- (ii) X_1, X_2, \dots, X_n は U -space (resp. u -space) かつ ψ は u -function.

参考文献

- [1] Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.
- [2] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.
- [3] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao and S. Saejung, *Uniform smoothness and U -convexity of ψ -direct sums*, J. Nonlinear Convex Anal., 6(2005), no. 2, 327-338.
- [4] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *On ψ -direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., 75(2003), 413-422.
- [5] K. S. Lau, *Best approximation by closed sets in Banach spaces*, J. Approx. Theory.,
- [6] K. Mitani, U -convexity of ψ -direct sums of Banach spaces, preprint.
- [7] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, *Smoothness of ψ -direct sums of Banach spaces*, to appear in Math. Inequal. Appl.

- [8] K. Mitani, K. -S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on \mathbb{C}^n* , J. Convex. Anal., 10, (2003), 89-107.
- [9] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of ψ -direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 277, (2003), no.1, 1-11.
- [10] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute norms on \mathbb{C}^2* , J. Math. Anal. Appl., 244(2000), 515-532.
- [11] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on \mathbb{C}^n* , J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879-905.
- [12] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute norms on \mathbb{C}^2 and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., 7(2002), 179-186.